

NOTA	
------	--

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA:

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	SECCIÓN:

- Instrucciones:**
- **NO HAY CONSULTAS.**
 - Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
 - Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
 - Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables.
 - Apagar y guardar sus **celulares**.

$$\text{Nota}=1+\frac{\text{Puntos}}{10}.$$

Duración= 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

- 1) a) [10 pts.] Se sabe que la derivada direccional de función $f(x, y) = \ln(x^2y)$ en el punto $P = (a, b)$ en la dirección del vector $\vec{u} = (1, -1)$ es $2\sqrt{2}$. Además la derivada direccional de $f(x, y)$ en $P = (a, b)$ en la dirección del vector $\vec{v} = (3, 0)$ es 6. Determine el punto $P = (a, b)$.
- b) [10 pts.] Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $x^3y + yz^2 = xz + yx^2z^3 + 7$ en el punto $(-1, -1, 2)$.

Desarrollo

- a) Primero notar que $f_x(x, y) = \frac{2}{x}$ y $f_y(x, y) = \frac{1}{y}$. Ahora como los vectores no son normales hay que normalizarlos y obtenemos el siguiente sistema:

$$D_u(f)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{a} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{b} = 2\sqrt{2} \text{ (4pts.)}$$

$$D_v(f)(a, b) = 1 \cdot \frac{2}{a} - 0 \cdot \frac{1}{b} = 6 \text{ (4pts.)}$$

De la segunda ecuación podemos concluir que $a = \frac{1}{3}$. Ahora reemplazando en la primera ecuación nos da que $b = \frac{1}{2}$. Finalmente el punto es $P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ (2 pts.)

- b) Primero necesitamos reescribir la ecuación para que quede de la forma $F(x, y, z) = k$.

$$x^3y + yz^2 - xz - yx^2z^3 = 7 \text{ (1pts.)}$$

Ahora las derivadas parciales nos quedan:

$$F_x(x, y, z) = 3x^2y - z - 2xyz^3 \text{ (2pts.)}$$

$$F_y(x, y, z) = x^3 + z^2 - x^2z^3 \text{ (2pts.)}$$

$$F_z(x, y, z) = 2yz - x - 3x^2yz^2 \text{ (2pts.)}$$

Por lo que nos queda que $F_x(-1, -1, 2) = -21$, $F_y(-1, -1, 2) = -5$ y $F_z(x, y, z) = 9$ (1 pts.), por lo que la ecuación del plano tangente es:

$$-21(x + 1) - 5(y + 1) + 9(z - 2) = 0 \text{ (2pts.)}$$

2) [20 pts.] Sea $f(x, y) \in C^2$ (es decir, las segundas derivadas parciales son continuas), tal que :

$$\begin{array}{ll} \blacksquare f_{xx} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 & \blacksquare f_{yy} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \\ \blacksquare f_x \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} & \blacksquare f_{xy} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \\ \blacksquare f_y \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} & \blacksquare f_{yx} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \end{array}$$

Si $h(t) = f(\sin(t), \cos(t))$. Calcular $h'' \left(\frac{\pi}{4} \right)$.

Desarrollo

Considerando $x = x(t) = \sin(t)$, $y = y(t) = \cos(t)$ y usando la regla de la cadena nos da que la primera derivada de h es:

$$h'(t) = f_x(x, y) \cdot \cos(t) - f_y(x, y) \sin(t) \text{ (5pts.)}$$

Derivando nuevamente nos queda:

$$\begin{aligned} h''(t) &= [f_{xx}(x, y) \cos(t) - f_{xy}(x, y) \sin(t)] \cos(t) - \sin(t) f_x(x, y) \\ &\quad - ([f_{yx}(x, y) \cos(t) - f_{yy}(x, y) \sin(t)] \sin(t) + \cos(t) f_y(x, y)) \end{aligned}$$

(10 pts. a criterio)

Ahora bien, si $t = \frac{\pi}{4}$ entonces $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y reemplazando nos queda:

$$\begin{aligned} h'' \left(\frac{\pi}{4} \right) &= \left[f_{xx} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} - f_{xy} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} f_x \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &\quad - \left(\left[f_{yx} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} - f_{yy} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} f_y \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Finalmente si reemplazamos en los valores que nos dan obtenemos

$$h'' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \left[2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} - \left(\left[2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \right)$$

Dónde el resultado final es:

$$h'' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0 - 1 - (0 + 1) = -2$$

(5 pts.)

3) [20 pts.] Considere la función en dos variables $f(x, y) = e^{-xy}$.

- Determine los máximos locales, mínimos locales y puntos silla de la función.
- Determine el máximo y mínimo absoluto de la función sobre la región
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4y^2 \leq 72\}$

Desarrollo

- Primero busquemos los puntos críticos. Notar que $f_x(x, y) = -ye^{-xy}$ y $f_y(x, y) = -xe^{-xy}$, por lo que el único punto crítico es el $(0, 0)$ (5 pts.). Ahora bien notar que $f_{xx}(x, y) = y^2e^{-xy}$, $f_{yy}(x, y) = x^2e^{-xy}$ y $f_{xy}(x, y) = e^{-xy}(xy - 1)$, por lo que nos queda que

$$D = f_{xx}(0, 0) \cdot f_{yy}(0, 0) - (f_{xy}(0, 0))^2 = 0 - 1 = -1 < 0$$

Por lo tanto tiene sólo un punto silla en $(0, 0)$. (5 pts.)

- Ahora para los máximos y mínimos absolutos necesitamos considerar el borde, para esto usaremos Lagrange considerando la restricción $9x^2 + 4y^2 = 72$. Nos queda:

$$\begin{aligned} -ye^{-xy} &= 18\lambda x \\ -xe^{-xy} &= 8\lambda y \\ 9x^2 + 4y^2 &= 72 \end{aligned}$$

(4 pts.)

No es difícil ver que x, y y λ son distintos de 0. Multiplicando la primera por x , la segunda por y e igualando llegamos a que:

$$9x^2 = 4y^2$$

Luego reemplazando esto en la restricción obtenemos que $x = \pm 2$ e $y = \pm 3$. Luego los puntos a comparar son $(2, -3), (-2, 3), (2, 3), (-2, -3), (0, 0)$ (4 pts.), y si evaluamos estos puntos en f nos queda:

$$\begin{aligned} f(-2, -3) &= e^{-6} \\ f(2, 3) &= e^{-6} \\ f(-2, 3) &= e^6 \\ f(2, -3) &= e^6 \\ f(0, 0) &= 1 \end{aligned}$$

Luego el máximo absoluto es e^6 y se alcanza en $(-2, 3)$ y $(2, -3)$. Además el mínimo absoluto es e^{-6} y se alcanza en $(2, 3)$ y $(-2, -3)$. (2 pts.)